



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



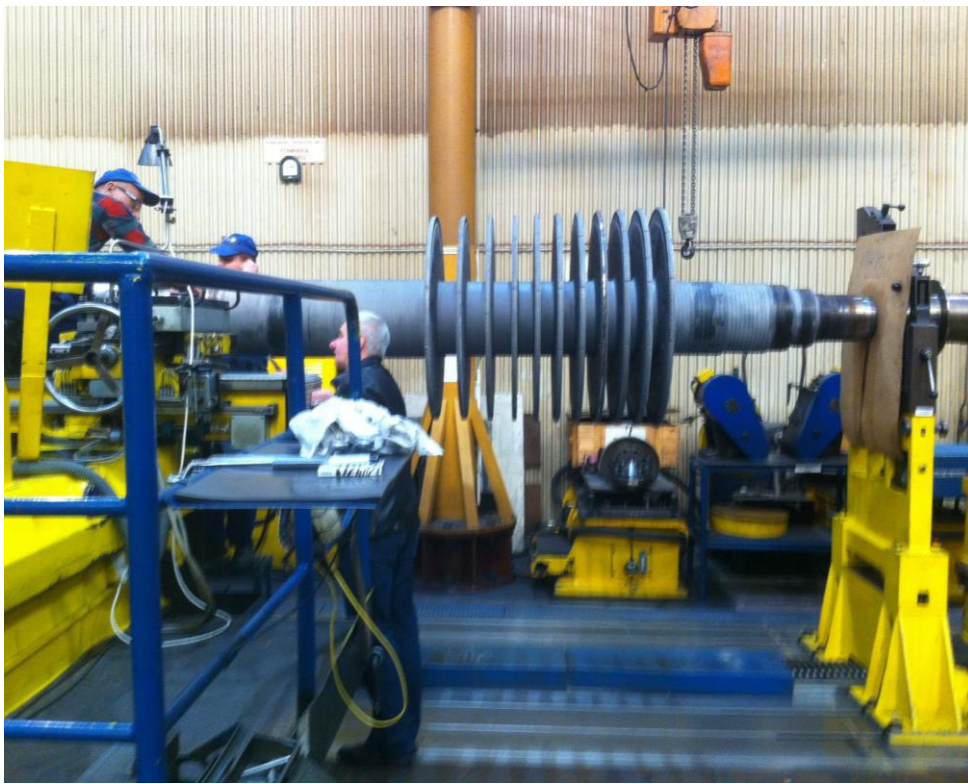
## Wykład 7

# Pręty skręcane swobodnie

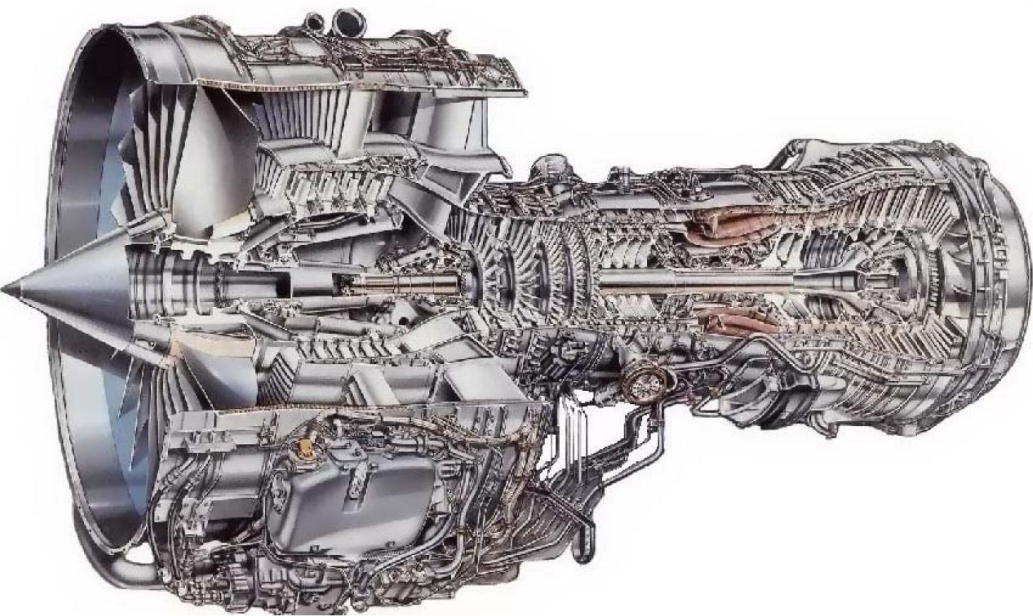
Pręt kołowy

Rura cienkościenna

Pręty o przekroju otwartym

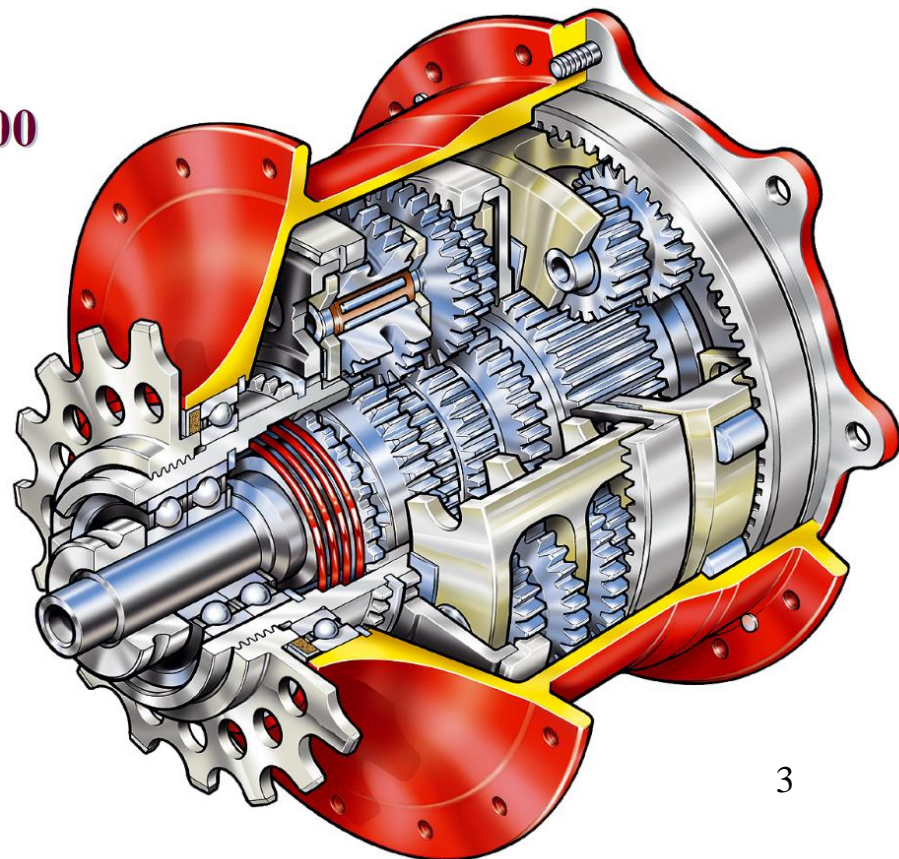


Wirnik turbiny  
TK200



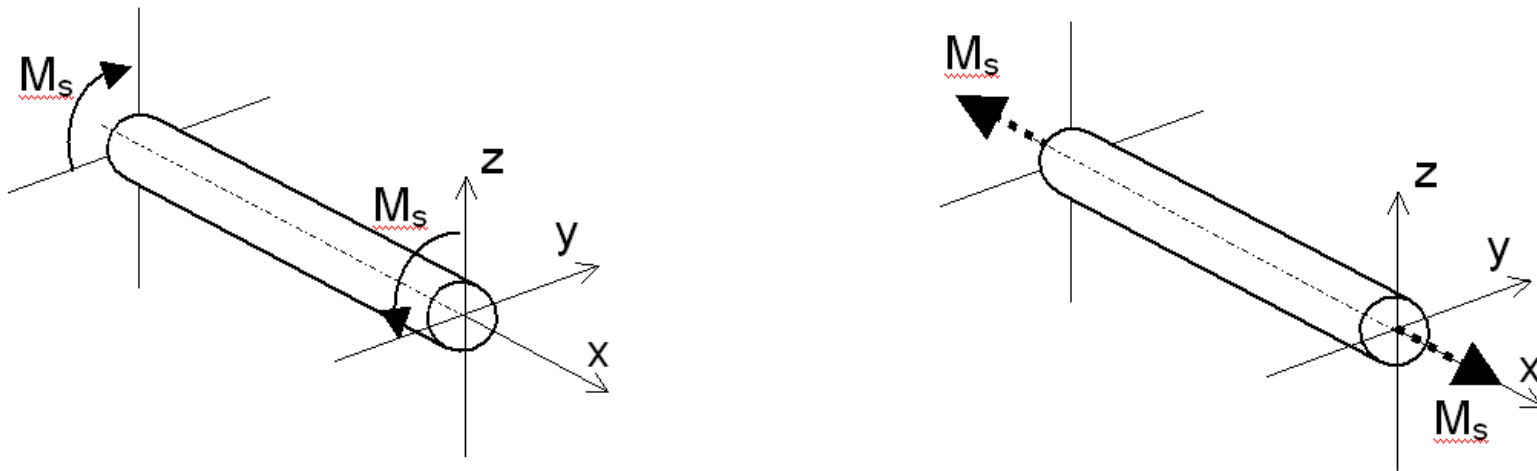
## Dwuprzepływowy silnik odrzutowy V2500

Ciąg: od: 97 kN, do 145 kN



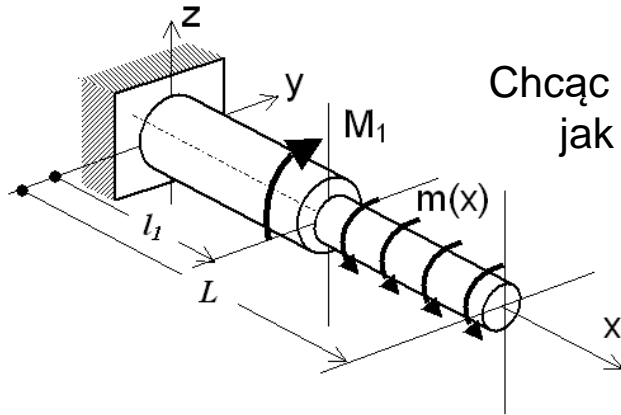
## Wyznaczanie składowej wysiłku przekroju w pręcie skręcanym

Skręcanie to taki przypadek obciążenia pręta, w którym jedyną składową wysiłku przekroju jest moment skręcający. Konwencję dodatniego znaku momentu skręcającego  $M_s$  przedstawia rys.3.1.



Rys. 3.1. Konwencja dodatniego znaku momentu skręcającego

## Wyznaczanie składowej wysiłku przekroju w pręcie skręcanym

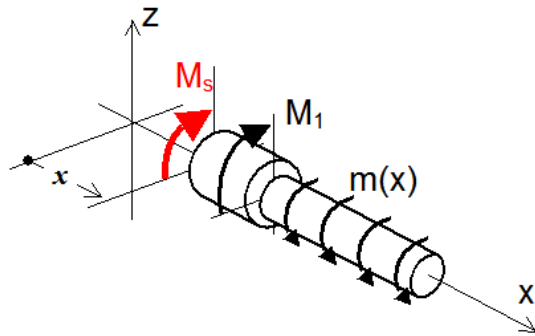


a)

Chcąc wyznaczyć składowe wysiłku przekroju postępujemy podobnie jak dla pręta rozciąganego wprowadzając myślowe przecięcie

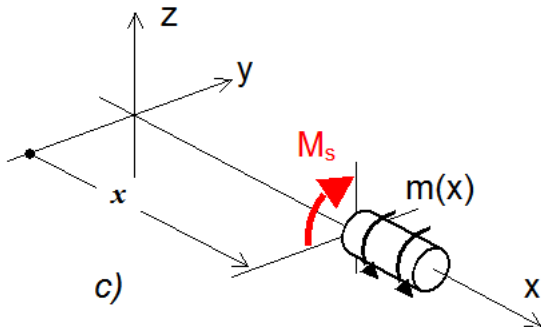
Równania równowagi momentów względem osi x w kolejnych przedziałach:

$$\text{dla } x \in (0, l_1): \quad -M_s(x) + \int_{l_1}^L m(s) ds - M_1 = 0$$



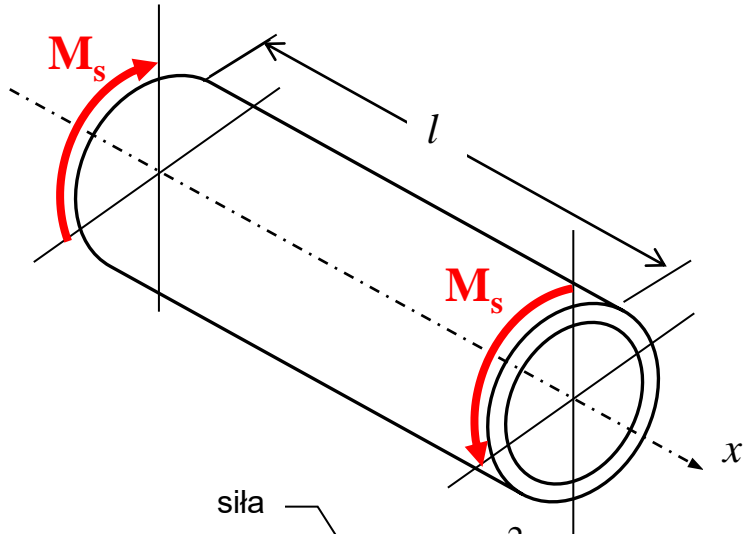
b)

$$\text{dla } x \in (l_1, L): \quad -M_s(x) + \int_x^L m(s) ds = 0$$

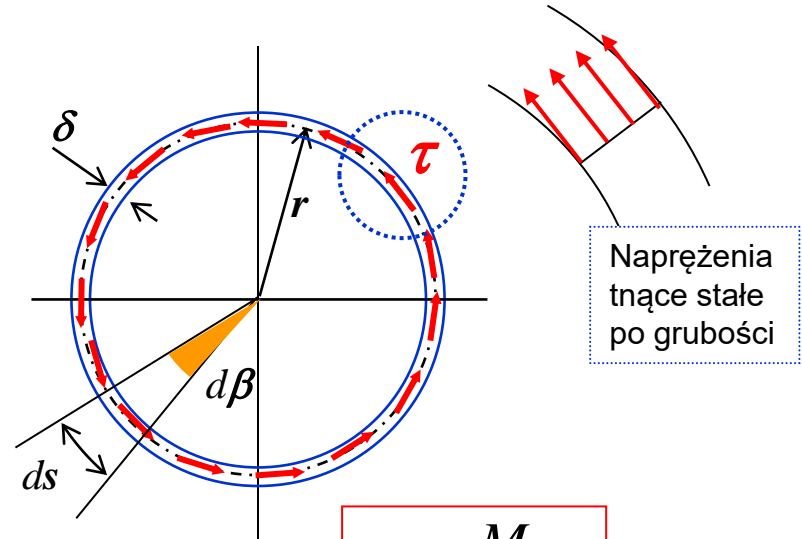


c)

# Skręcanie cienkiej rury o przekroju kołowym



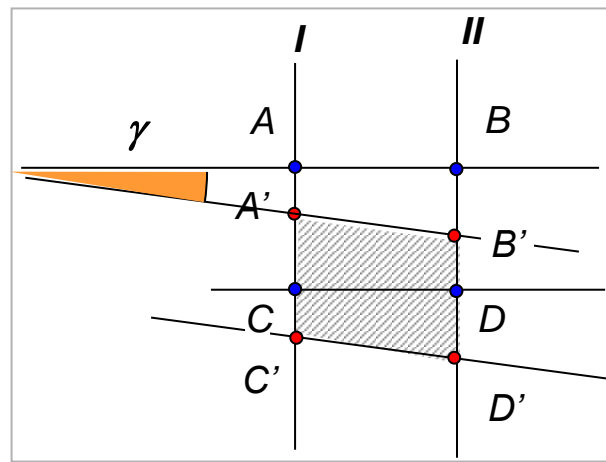
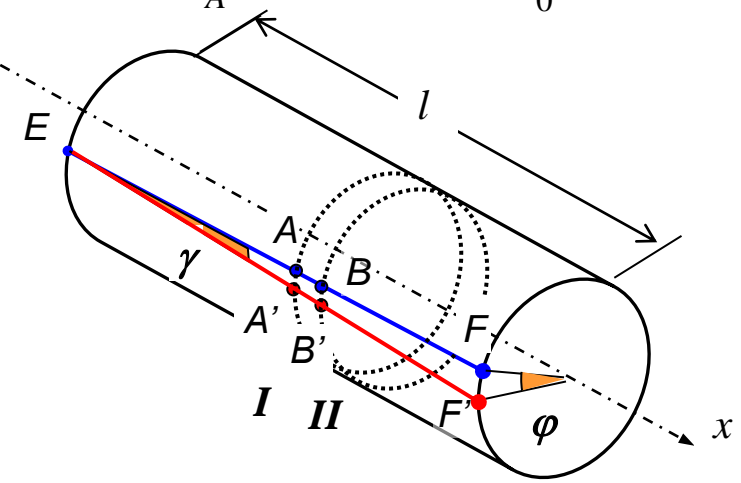
$r$  - średni promień  
 $\delta$  - grubość ( $\delta \ll r$ )  
 $l$  - długość



Naprężenia tnące stałe po grubości

$$M_s = \int_A r \cdot \tau \cdot \delta ds = \int_0^{2\pi} \tau \delta r \cdot r d\beta = 2\pi r^2 \delta \cdot \tau$$

$$\tau = \frac{M_s}{2\pi r^2 \delta}$$

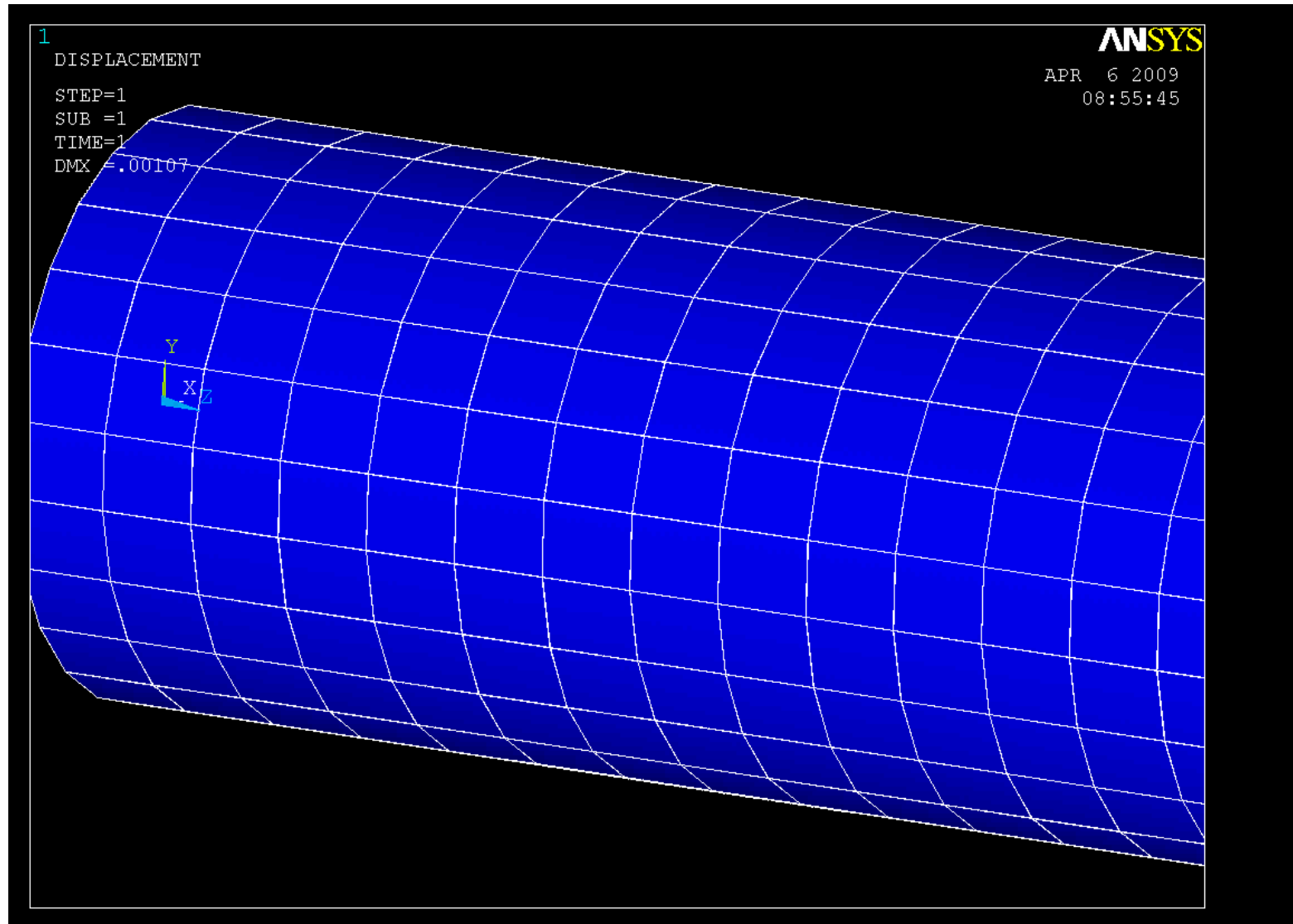


$\varphi$  - kąt skręcenia w przekroju końcowym  
 $\gamma$  - kąt odkształcenia postaciowego  
 $\theta$  - kąt skręcenia na jednostkę długości

$$|\overline{FF'}| = \gamma \cdot l = \varphi \cdot r \longrightarrow \gamma = \frac{\varphi}{l} \cdot r = \theta \cdot r$$

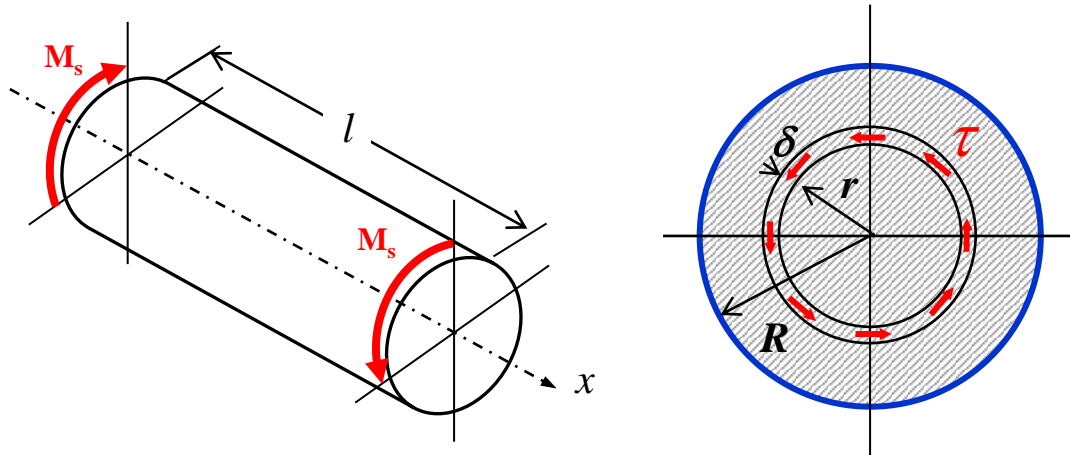
# Skręcanie pręta o przekroju kołowym

Skręcanie swobodne to taki przypadek skręcania, w którym istnieje pełna swoboda ewentualnego pacyenia się przekroju, czego konsekwencją jest istnienie tylko naprężeń stycznych.



# Skręcanie pręta kołowego

Pręt o przekroju kołowym skręca się tak, że kolejne jego przekroje obracają się względem osi nie podlegając deplanacji (*pozostają płaskie, a punkty przekroju leżące wzdłuż promienia pozostają współliniowe*). Opisuje to tzw. hipoteza płaskich przekrojów.



- HIPOTEZA PŁASKICH PRZEKROJÓW**
- Skręcenie jest równomierne wzdłuż długości pręta
  - Przekrój poprzeczny pozostaje płaski
  - Punkty leżące wzdłuż promienia pozostają współliniowe

Kąt odkształcenia postaciowego:

$$\gamma = \frac{\varphi}{l} \cdot r = \theta \cdot r$$

Naprężenia tnące:

$$\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \theta \cdot r$$

$$M_s = \int_A dM_s = \int_0^R \tau \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r = 2\pi G \theta \int_0^R r^3 dr = 2\pi G \theta \frac{1}{4} R^4$$

$$M_s = G \theta \frac{1}{2} \pi R^4 = G \theta \frac{1}{32} \pi D^4 = G \theta J_0 \rightarrow \theta = \frac{M_s}{GJ_0}$$

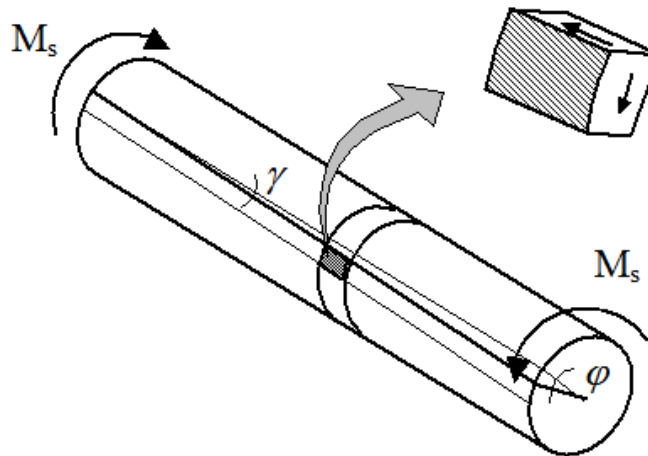
Jednostkowy kąt skręcenia

$$J_0 = \frac{\pi}{32} (D_z^4 - D_w^4)$$

Moment bezwładności na skręcanie pręta kołowego drażonego 8



# Rozkład naprężeń tnących w przekroju



$$\tau = \gamma \cdot G = G \cdot \theta \cdot r = G \cdot \frac{M_s}{GJ_0} \cdot r$$

$$\tau = \frac{M_s \cdot r}{J_0}$$

Wartość naprężeń tnących w przekroju poprzecznym pręta kołowego zmienia się liniowo z promieniem r

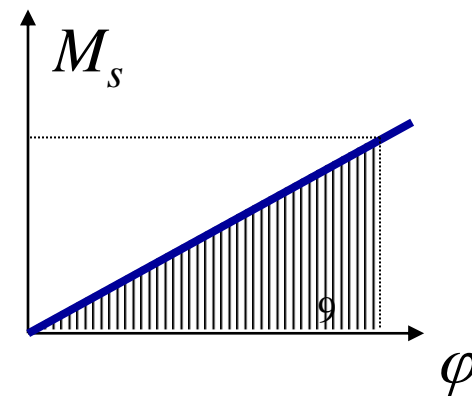
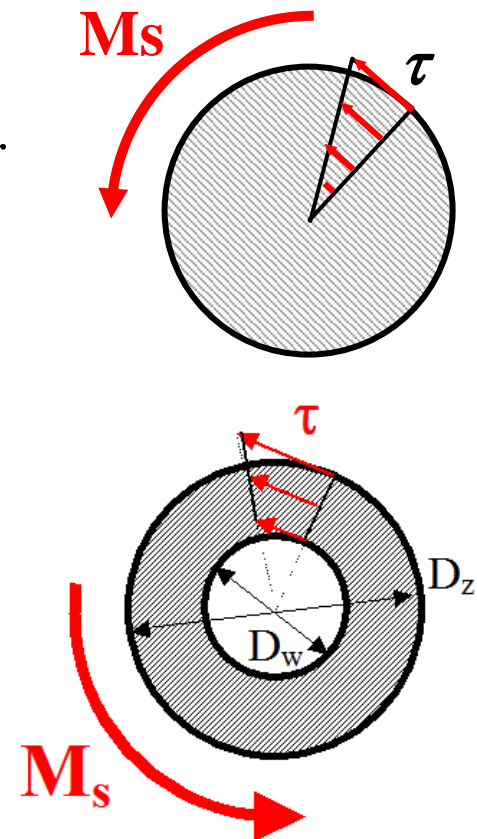
Względny kąt skręcenia względem przekroju  $x_0$  wyznaczyć możemy przez scałkowanie wzdłuż długości pręta:

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \theta(x) dx$$

Energia sprężysta pręta skręcanego

$$U_{spr} = \frac{1}{2} M_s \cdot \varphi$$

$$U_{spr} = \frac{1}{2} M_s \cdot \frac{M_s l}{GJ_0} = \frac{1}{2} \frac{M_s^2 l}{GJ_0}$$

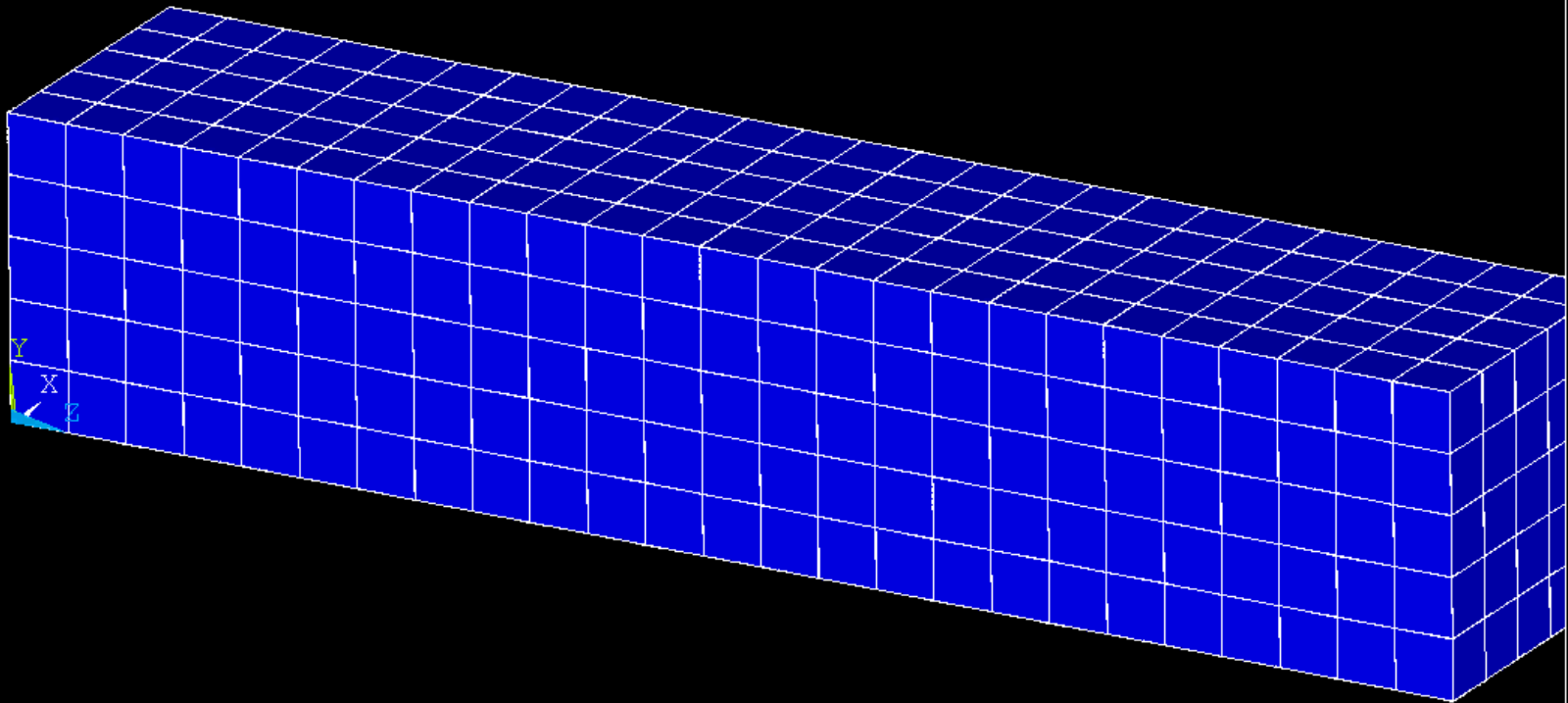


# Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

1  
DISPLACEMENT  
STEP=1  
SUB =1  
TIME=1  
DMX =.004079

ANSYS

APR 6 2009  
09:05:52



# Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

1

DISPLACEMENT

STEP=1

SUB =1

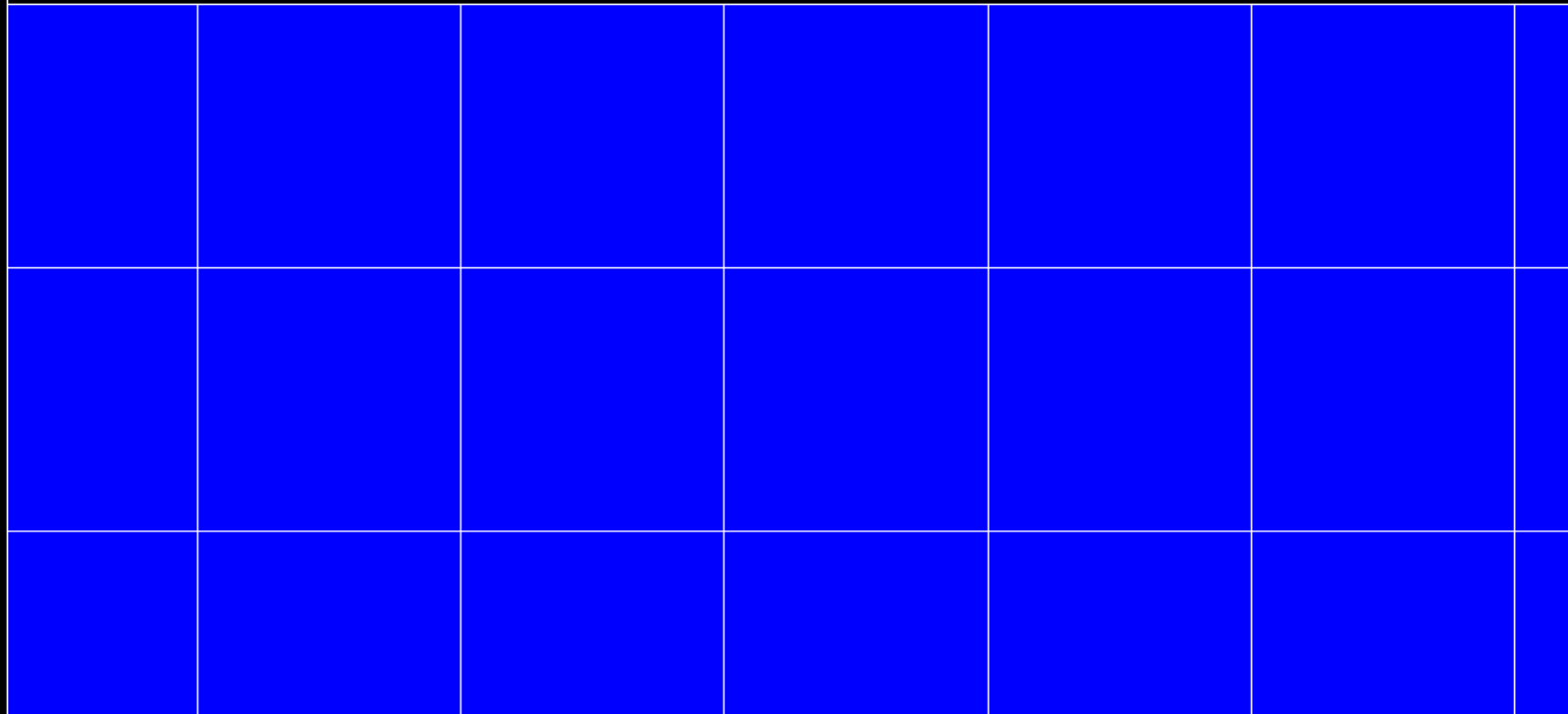
TIME=1

DMX =.004079

**ANSYS**

APR 6 2009

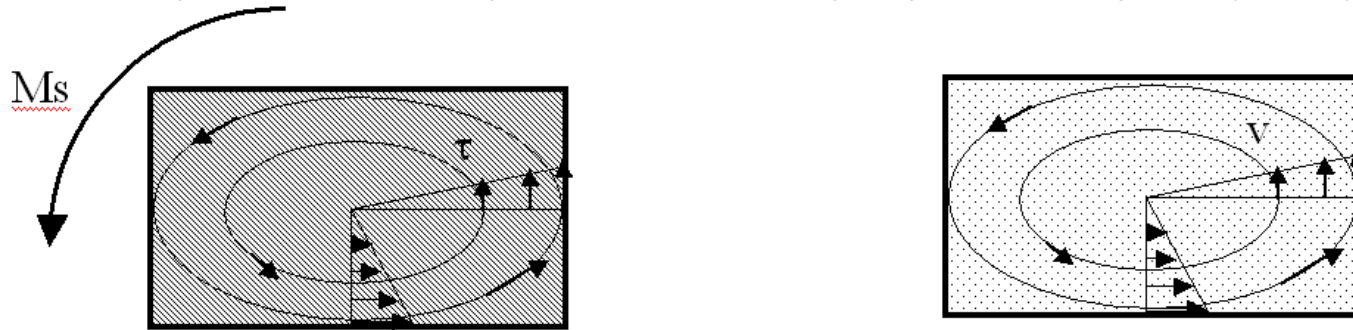
09:16:56



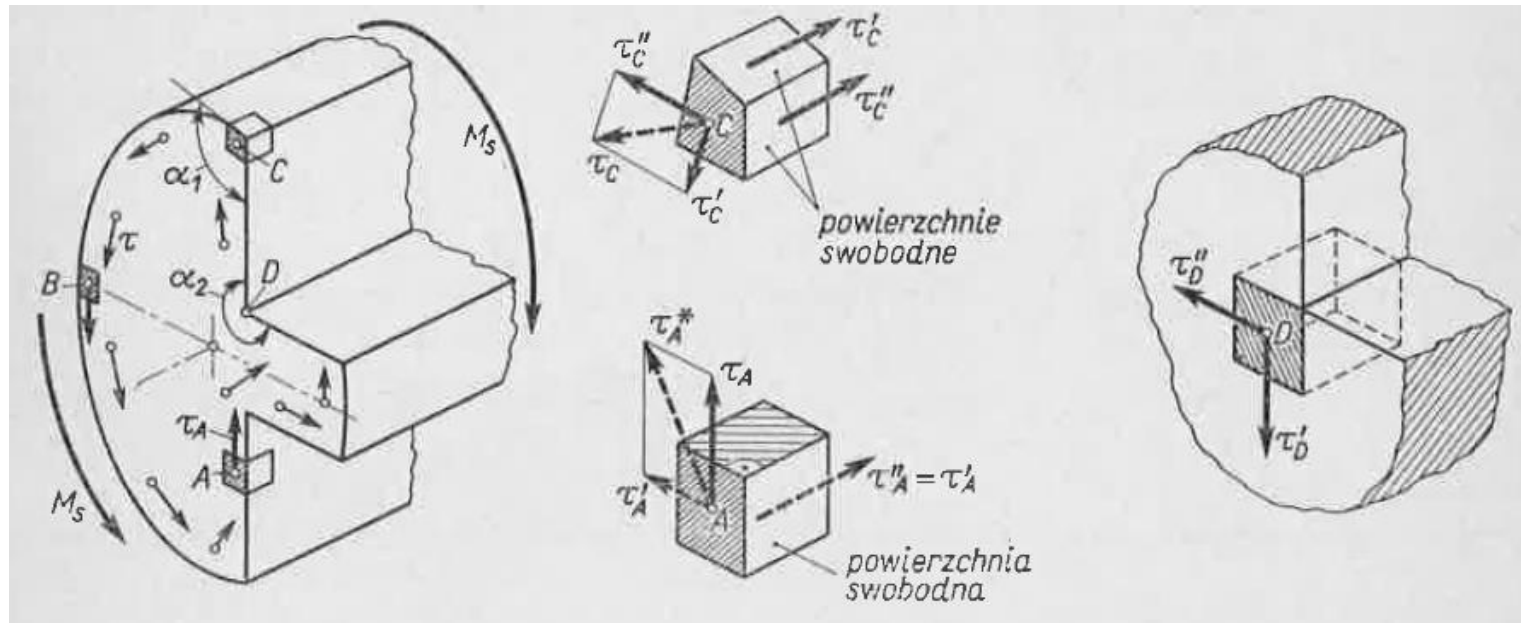

# Skręcanie pręta o przekroju niekołowym

Skręcanie swobodne to taki przypadek skręcania, w którym istnieje pełna swoboda ewentualnej deplanacji przekroju, czego konsekwencją jest istnienie tylko naprężeń stycznych.

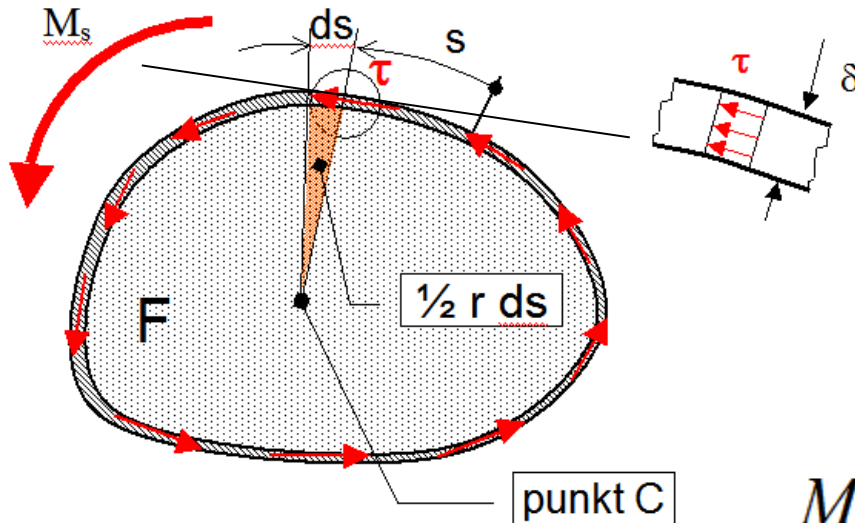
Dla przekroju o dowolnym kształcie rozkład naprężeń wykazuje analogię hydrodynamiczną, tzn. rozkład naprężeń tnących jest analogiczny do rozkładu prędkości cieczy nielepkiej i nieściśliwej krążącej ruchem ustalonym w płaskim naczyniu o kształcie identycznym z przekrojem pręta skręcanego.



Rys. 3.4. Obraz naprężeń przy skręcaniu i analogia hydrodynamiczna



# Skręcanie rur cienkościennych



$$q = \tau \delta = \text{const}$$

Moment względem punktu C:

$$M_s = \oint q r ds = q \oint r ds = 2F q$$

F - pole

I wzór BREDTA

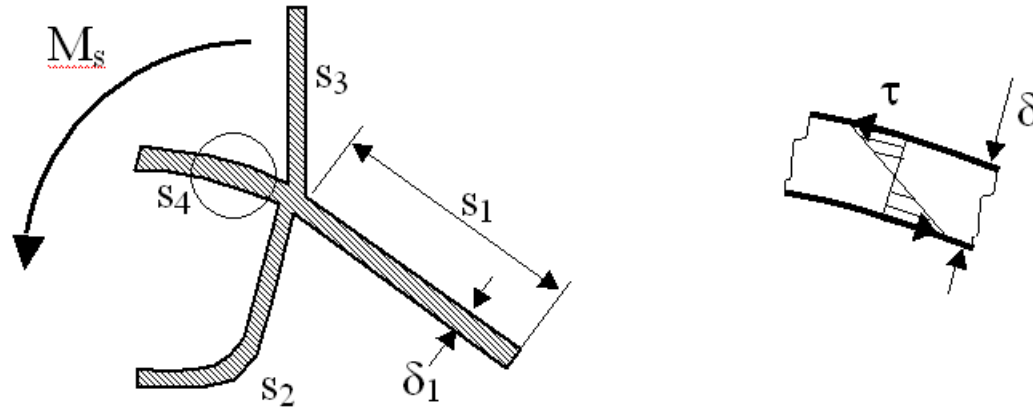
$$q(s) = \tau(s) \cdot \delta(s) = \frac{M_s}{2F} \quad \text{- stały wydatek naprężeń stycznych}$$

II wzór BREDTA

$$\theta(x) = \frac{M_s(x)}{4GF^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)} \quad \text{- jednostkowy kąt skręcenia}$$

## Skęrcanie swobodne cienkościennego pręta o przekroju otwartym

Taki profil bardzo źle pracuje na skęrcanie swobodne (rys.3.7):

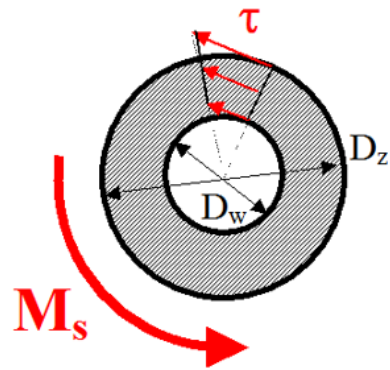


Rys. 3.7. Obraz pracy skęrcanego pręta cienkościennego o przekroju otwartym

$$\tau_i = \frac{3M_s \cdot \delta_i}{\sum_i s_i \cdot \delta_i^3} \text{ - naprężenia maksymalne w odgałęzieniu,}$$

$$\theta(x) = \frac{3M_s(x)}{G \sum_i s_i \cdot \delta_i^3} \text{ - jednostkowy kąt skęrcenia}$$

Rura kołowa



Jednostkowy kąt skręcenia

$$\theta = \frac{M_s}{GJ_0}$$

Napężenie tnące

$$\tau = \frac{M_s \cdot r}{J_0}$$

Moment bezwładności na skręcanie

$$J_0 = \frac{\pi}{32} (D_z^4 - D_w^4)$$

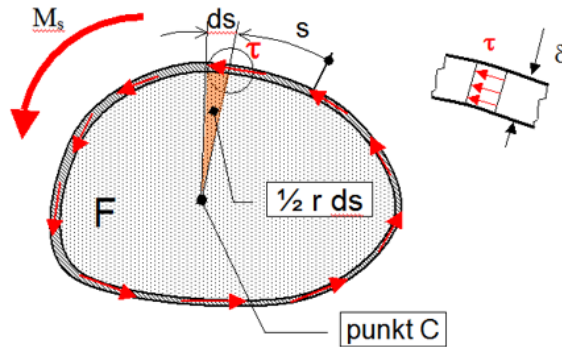
Napężenie tnące maksymalne

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_0}$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie

$$W_0 = \frac{J_0}{r_{max}}$$

Rura cienkościenna

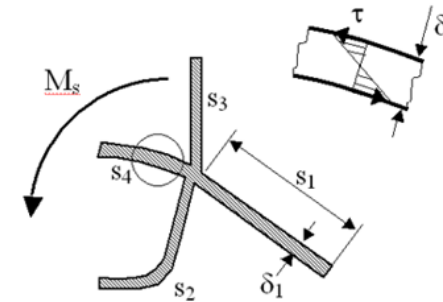


$$\theta(x) = \frac{M_s(x)}{4GF^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)}$$

$$\tau = \frac{M_s}{2F \cdot \delta}$$

$$J_s = \frac{4F^2}{\oint \frac{ds}{\delta(s)}}$$

Profil cienkościenny otwarty



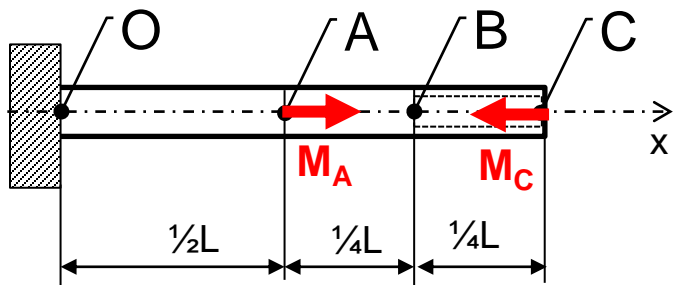
$$\theta = \frac{M_s}{GJ_s}$$

$$\tau = \frac{M_s \cdot \delta_i}{J_s}$$

$$J_s = \frac{1}{3} \sum s_i \delta_i^3$$

## Podsumowanie

## Zadanie 7.1 Skręcanie pręta o przekroju kołowym



$$D_z = 8 \text{ cm}$$

$$D_w = 5 \text{ cm}$$

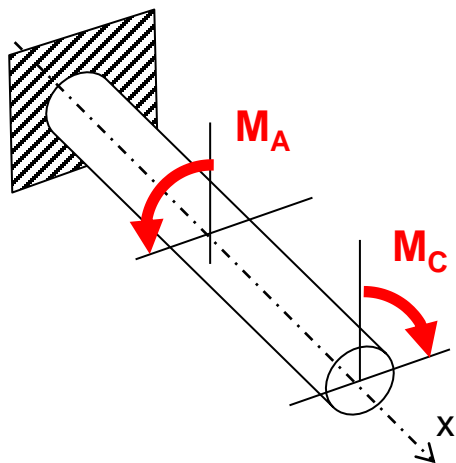
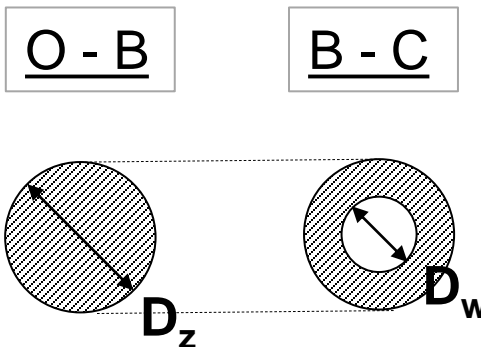
$$L = 2 \text{ m}$$

$$E = 7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.35$$

$$M_A = 3 \cdot M^*$$

$$M_C = M^* = 5 \text{ kNm}$$



Wyznaczyć:

$M_s(x) = ?$  - rozkład momentu skręcającego

$\tau_{\max}(x) = ?$  - rozkład maksymalnego naprężenia tnącego

$\theta(x) = ?$  - rozkład jednostkowego kąta skręcenia

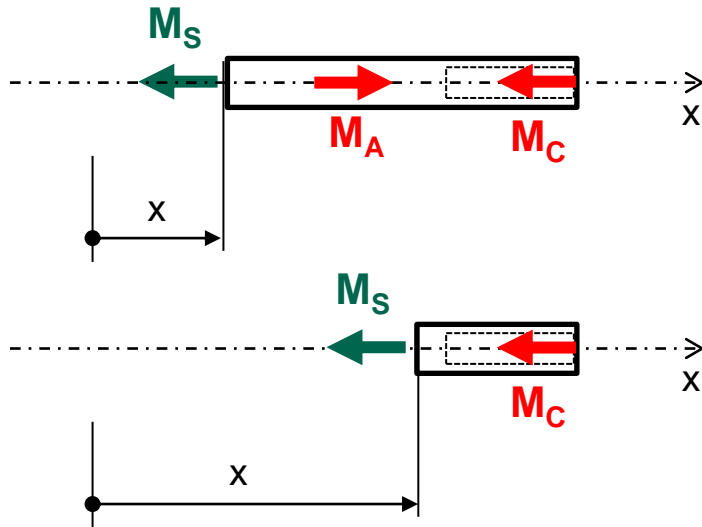
$\varphi(x) = ?$  - rozkład kąta skręcenia wzdłuż długości pręta

0. Wyliczenie Modułu Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 2.6 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$



## 1. Rozkłady sił wewnętrznych



Przecinamy myślowo w przedziale O-A

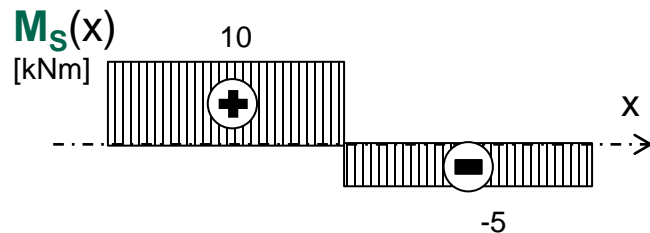
Równanie równowagi momentów względem osi x:

$$-M_S + M_A - M_C = 0 \rightarrow M_S = M_A - M_C = 10 \text{ kNm}$$

Przecinamy myślowo w przedziale A-C

Równanie równowagi momentów względem osi x:

$$-M_S - M_C = 0 \rightarrow M_S = -M_C = -5 \text{ kNm}$$



## 2. Charakterystyki geometryczne przekrojów

Charakterystyki geometryczne przekroju w przedziale O-B

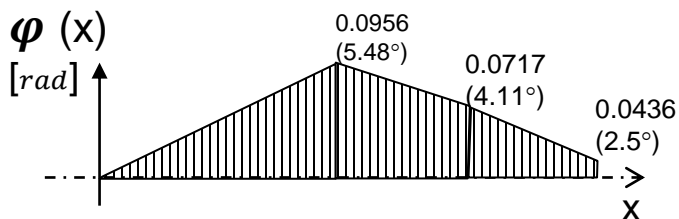
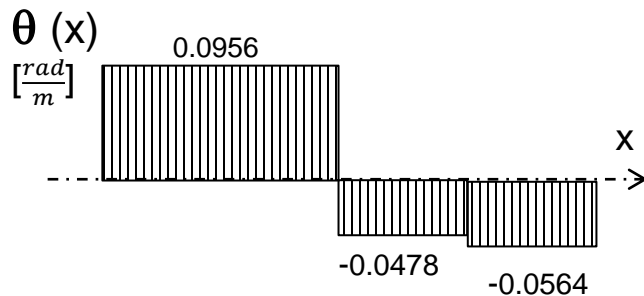
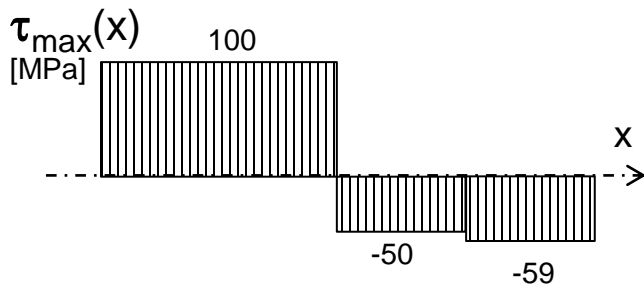
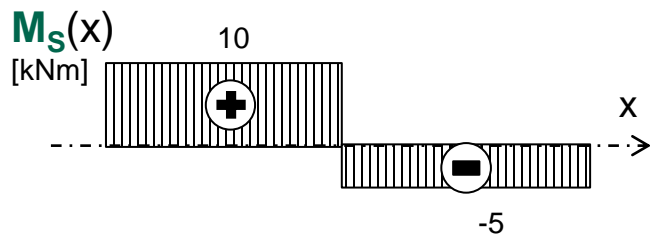
$$J_o = \frac{\pi}{32} D_Z^4 = \frac{\pi}{32} 8^4 \approx 402 \text{ cm}^4 - \text{moment bezwładności na skręcanie}$$

$$w_o = \frac{J_o}{r_{max}} = \frac{402}{4} \approx 100 \text{ cm}^3 - \text{wskaźnik wytrzymałości na skręcanie}$$

Charakterystyki geometryczne przekroju w przedziale B-C

$$J_o = \frac{\pi}{32} (D_Z^4 - D_w^4) = \frac{\pi}{32} (8^4 - 5^4) \approx 340 \text{ cm}^4 - \text{moment bezwładności na skręcanie}$$

$$w_o = \frac{J_o}{r_{max}} = \frac{341}{4} \approx 85 \text{ cm}^3 - \text{wskaźnik wytrzymałości na skręcanie}$$



### 3. Rozkłady maksymalnego naprężenia tnącego

Maksymalne naprężenia tnące dla przekrojów w przedziale O-A

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{10000 \text{ Nm}}{100 \text{ cm}^3} \approx 100 \text{ MPa}$$

Maksymalne naprężenia tnące dla przekrojów w przedziale A-B

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{100 \text{ cm}^3} \approx -50 \text{ MPa}$$

Maksymalne naprężenia tnące dla przekrojów w przedziale B-C

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{85 \text{ cm}^3} \approx -59 \text{ MPa}$$

### 4. Rozkłady jednostkowego kąta skręcenia

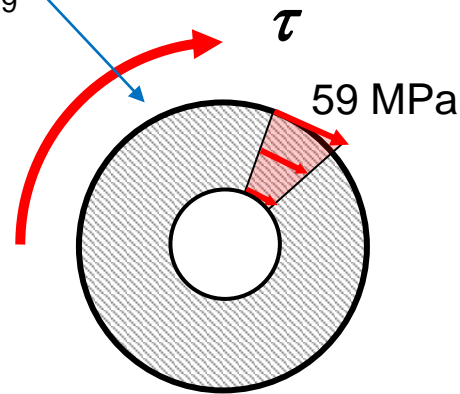
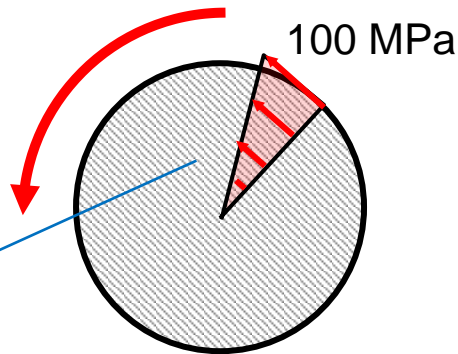
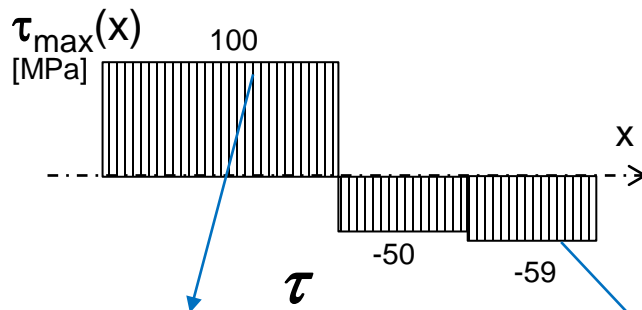
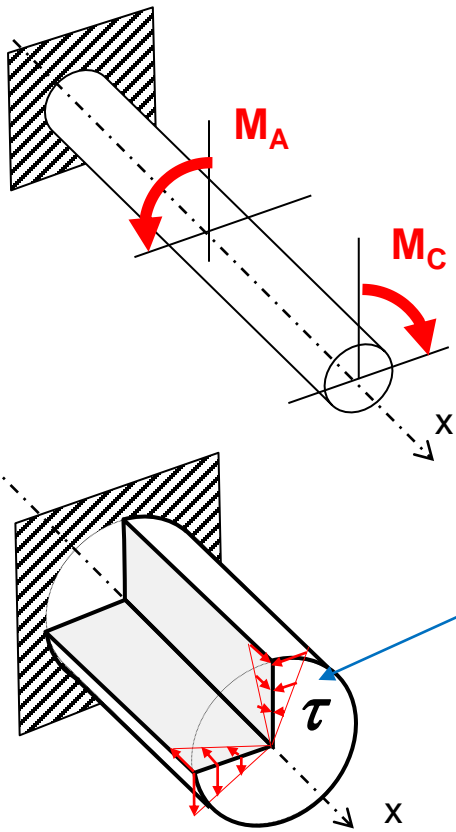
$$\underline{\text{O-A:}} \quad \theta(x) = \frac{M_S(x)}{GJ_0} = \frac{10000 \text{ Nm}}{2.6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 402 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \approx 0.0956 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\underline{\text{A-B:}} \quad \theta(x) = \frac{M_S(x)}{GJ_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{2.6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 402 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \approx -0.0478 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

$$\underline{\text{B-C:}} \quad \theta(x) = \frac{M_S(x)}{GJ_0} = \frac{-5000 \text{ Nm}}{2.6 \cdot 10^{10} \text{ Pa} \cdot 341 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4} \approx -0.0564 \frac{\text{rad}}{\text{m}}$$

### 5. Względny kąt skręcenia

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^x \theta(x) dx$$



6. Naprężenia zredukowane:

1) Według Hipotezy Treski

$$\sigma_{red}^T = 2 \cdot \tau_{max} = 200 \text{ MPa}$$

2) Według Hipotezy Hubera

$$\sigma_{red}^{MH} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}$$

$$\sigma_{red}^H = \sqrt{3} \cdot \tau_{max} = 173 \text{ MPa}$$

